Lista 1

1) Niech $\Omega = \{1, ..., n\}$ będzie wyposażone w jednostajną miarę prawdopodobieństwa, tzn. zachodzi $P(i) = \frac{1}{n}$ dla wszystkich $i \in \Omega$.

(a) pokaż że w przypadku gdy n jest liczbą pierwszą, jedyne możliwe pary (A, B) niezależnych zdarzeń w Ω to pary gdzie albo A albo B są pustym zbiorem $\varnothing$ bądź zbiorem Ω.

(b) Wypisz wszystkie pary niezależnych zdarzeń dla $n = 4$.

2) Urna zawiera białe kule ponumerowane od 1 do 15 i czarne kule również ponumerowane od 1 do 15. Załóżmy że losujesz 4 kule bez zwracania. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń prawdopodobieństwa dla tego schematu losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo że

(a) nie ma dwóch kul które mają ten sam numer?

(b) otrzymano dokładnie dwie kule które mają ten sam numer?

(c) otrzymano dwie pary kul o tym samym numerze?

3) Rodzina ma 3 dzieci, każde z nich to chłopiec bądź dziewczynka z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Niech $A =$"wśród dzieci jest co najwyżej 1 dziewczynka " $B =$ "w tej rodzinie są dzieci obu płci."

(a) Czy A i B są niezależne?

(b) Czy uprzednio zdefiniowane A i B są niezależne jeśli rodzina ma 4 dzieci?

(c) Małżonkowie decydują że będą starać się o kolejne dzieci dopóki nie będą mieć dzieci obu płci. Ignorując możliwość ciąż mnogich i zakładając że każda próba jest niezależna i kończy się albo urodzeniem chłopca albo dziewczynki z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, jaka jest wartość oczekiwana liczby dzieci którą to małżeństwo będzie mieć?

4) Niech $\Omega = \{a, b, c, d\}$ będzie wyposażone w jednostajną miarę prawdopodobieństwa tzn. $P(i) = \frac{1}{4}$ dla każdego $i \in \Omega$. Niech Ω^* będzie zbiorem wszystkich zmiennych losowych X na Ω o własności że $X \in \{1, 2, 3, 4\}$, tzn. $X(\omega)$ ma wartości wyłącznie w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$. Wyposaż Ω^* w jednostajną miarę prawdopodobieństwa P^*, tzn. $P^*(j) = \frac{1}{|\Omega^*|}$ gdzie $j \in \Omega^*$ i $|\Omega^*|$ oznacza moc zbioru Ω^*. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie losowo wybrane zmienne losowe X oraz Y z Ω^* są niezależne?

5) Niech G będzie grafem losowym składającym się z n wierzchołków, gdzie krawędzie między parami wierzchołków (i, j) są niezależnie generowane z prawdopodobieństwem $\frac{c}{n}$ gdzie c jest dodatnią stałą > 0 . Równoważnie G można interpretować jako element z przestrzeni prawdopodobieństwa Ω, której elementami są grafy z n wierzchołkami i dowolny graf z m krawędziami ma prawdopodobieństwo $P(G) = \left(\frac{c}{n}\right)^m \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{\binom{n}{2} - m}$.

(a) Oblicz oczekiwaną ilość trójkątów w G. (trójkątem w G nazywamy dowolny zbiór trzech wierzchołków (i, j, k) taki że istnieje krawędź między $(i, j), (j, k)$ oraz (k, i) - trójkąty są inaczej nazywane grafami pełnymi stopnia 3)

(b) Niech K_4 będzie grafem pełnym stopnia 4, tzn. zbiorem 4 wierzchołków gdzie pomiędzy każdą parą wierzchołków istnieje krawędź. Pokaż, że prawdopodobieństwo odnalezienia K_4 w G dąży do zera gdy $n \to \infty$ (Podpowiedź: użyj nierówności Markova)

6)

(a) Czy możemy mieć zmienną losową o wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X = 3$ oraz $\mathbb{E}X^2 = 8$?

(b) Czy można skonstruować zmienną losową o wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X = 3$ oraz $\mathbb{E}X^2 = 9$?

(c) Załóżmy, że dla zmiennej losowej X mamy $P(X \in \{1, 2, 3\}) = 1$ oraz $\mathbb{E}X = 2.5$. Jakie są najmniejsze i największe możliwe wartości wariancji zmiennej losowej X?

(d) Zmienna losowa ma rozkład $P(X = x) = \frac{x}{15}$ dla $x = 1, 2, 3, 4, 5$, i 0 poza tym. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.

7)

(a) Załóżmy że X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi z wartościami oczekiwanymi $\mathbb{E}X = 1, \mathbb{E}Y = 2$ oraz wariancjami $var(X) = 3$ i $var(Y) = 1$. Znajdź średnią i wariancję zmiennej losowej $Z = 3X + 4Y - 5$.

(b) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale $[0, a]$. Znajdź funkcję dystrybuanty oraz gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$.

(c) Niech X będzie absolutnie ciągłą zmienną losową ze ściśle monotonicznie rosnącą funkcją dystrybuanty $F(z)$. Pokaż, że zmienna losowa $Y = F(X)$ ma rozkład jednostajny $U([0, 1])$.

8) Załóż, że $X_1, ..., X_n$ są niezależne i o identycznym rozkładzie (iid) i mają funkcję dystrybuanty $F(x)$. Znajdź funkcję dystrybuanty następujących zmiennych losowych:

(a) $Y_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$ oraz

(b) $Z_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$.

(c) Oblicz Y_n oraz Z_n dla przypadku szczególnego, gdy $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ dla $x \geqslant 0$ (i $F(x) = 0$ dla $x < 0$) , $\lambda > 0$ i pokaż, że zmienna losowa $Y_n - (\frac{1}{\lambda}) \ln n$ zbiega według rozkładu gdy $n \to \infty$ do zmiennej losowej Y^* która ma funkcję dystrybuanty $G(z) = e^{-e^{-\lambda z}}$ (rozkład Gumbela), $z \in \mathbb{R}$.

(d) Oblicz Y_n oraz Z_n dla przypadku szczególnego, gdy zmienne losowe $X_i \sim U([0, 1])$, to jest mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$.

9)

(a) Załóż że X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$ i $Y = X$. Znajdź funkcję wspólnej dystrybuanty $F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$ zmiennych losowych X oraz Y

(b) Załóż że X i Y mają wspólną funkcję gęstości $f(x, y) = 6y$ dla $x > 0, y > 0$ i $x + y < 1$, ($f(x, y) = 0$ w przeciwnym wypadku). Znajdź gęstości brzegowe zmiennych losowych X oraz Y.

(c) Niech X będzie zmienną losową o wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X = 2$ oraz wariancji $var(X) = 3$. Niech $Y = aX + b$. Znajdź wartości a i b takie że $\mathbb{E}Y = 0$ oraz $var(Y) = 1$.

10) 10 osób wsiada do windy na pierwszym piętrze siedmiopiętrowego budynku. Każda z nich wysiada na jednym z sześciu pięter powyżej wybranych losowo. Jaka jest oczekiwana liczba zatrzymań windy podczas jej podróży do góry? Uogólnij rezultat do $k-$ piętrowego budynku z $k \geqslant 2$. Oszacuj wartość pięter k_0 że prawdopodobieństwo że winda zatrzyma się dokładnie 10 razy jest większa od 0.9 dla wszystkich $k \geqslant k_0$.