1. Grupa zajęciowa liczy 36 studentów, a w sali zajęciowej znajdują się 34 miejsca. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dla któregoś ze studentów zabraknie miejsca siedzącego? Przyjmij, że studenci przychodzą na zajęcia z prawdopodobieństwem 90% i niezależnie od siebie.

2. (*) Rozważmy sieć utworzoną przez n urządzeń. Przy starcie systemu urządzenia otrzymują w sposób losowy unikalne adresy od 0 do $n-1$. Po krótkotrwałym zaniku zasilania wznowiono działanie sieci i ponownie rozdzielono tę samą pulę adresową. Oznaczmy przez P_n prawdopodobieństwo, że istnieje urządzenie, które otrzymało taki sam adres, jaki miało przed awarią. Oblicz $\lim_{n\to\infty} P_n$.

3. Cena jednego zakładu Dużego Lotka kosztuje 3zł. Typowe wypłaty za trafienie trójki, czwórki, piątki to odpowiednio 24 zł, 180 zł, 5500 zł. Za trafienie szóstki: wypłacane jest $2 \cdot 10^6$ zł (lub więcej, gdy jest kumulacja) do podziału pośród wszystkich szczęśliwców. Zakładając, że tylko jedna osoba trafi szóstkę, oblicz:

   (a) średnią wygraną,

   (b) wariancję i odchylenie standardowe wygranej,

   (c) wysokość kumulacji, przy której opłaca się grać.

4. Rozważmy sekwencje zero-jedynkowe o długości n rozpoczynające się od $x_1 = 1$, a kończące się na $x_n = 0$ oraz zawierającą tylko jedną parę $x_i x_{i+1}$ taką, że $x_i = 1$ oraz $x_{i+1} = 0$ (Przez x_i rozumiemy i-tą wartość tej sekwencji). Załóżmy, że $P(x_i = 1) = p$. Jaka jest oczekiwana długość najdłuższej podsekwencji jedynek?

5. Promień koła R jest zmienną losową o ciągłym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, p)$. Podaj gęstość prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej losowej opisującej

   (a) obwód koła $L = 2\pi R$,

   (b) pole koła $S = \pi R^2$.

6. Sokrates i Platon umawiają się na spotkanie przy wejściu do ateńskiej agory między godziną 16:00 a 17:00 w ten sposób, że przychodzą na miejsce spotkania i oczekują na drugą osobę 15 minut, nie dłużej jednak niż do godziny 17:00. Moment przyjścia obu osób jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[16^{00}, 17^{00}]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania?

7. Dystrybuanta pewnego rozkładu prawdopodobieństwa $F(x)$ dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

   Podaj:

(a) funkcję gęstości tego rozkładu $f(x)$,

(b) wartość oczekiwaną,

(c) wariancję i odchylenie standardowe,

(d) k-ty moment zwykły.

8. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa pewnego rozkładu $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin(x) & \text{dla } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Wyznacz:

(a) parametr α,

(b) dystrybuantę rozkładu $F(x)$,

(c) wartość oczekiwaną,

(d) medianę i kwartyle.

9. Na przejechanie pewnej trasy autobus potrzebuje 4 minuty, a tramwaj 5 minut. Prawdopodobieństwo, że dany pojazd przyjedzie jest stałe w każdej minucie oraz wynosi $\frac{2}{15}$ dla autobusu i $\frac{4}{15}$ dla tramwaju. W każdej minucie nie mogą przyjechać jednocześnie ani dwa tramwaje ani dwa autobusy. Odpowiedz na pytania:

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu godziny przyjedzie 8 autobusów? a 16 tramwajów?

(b) Jakie są szanse na dojechanie w ciągu 10 minut od pojawienia się na przystanku, dla obu środków transportu?

(c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba czekająca na przystanku autobusowym dotrze do celu wcześniej niż osoba czekająca na przystanku tramwajowym?

10. W sali znajduje się k maszyn. Czas do awarii pojedynczej maszyny dany jest rozkładem wykładniczym o średniej τ. Jaki jest rozkład prawdopodobieństwa czasu do awarii

(a) pierwszej maszyny?

(b) ostatniej maszyny?

11. Drużyna A strzela średnio dwa gole w meczu, a drużyna B — jeden. Zakładając, że strzelenie gola przez daną drużynę w każdej minucie jest stałe oraz nie zależy od drużyny przeciwnej, ani straconych bramek, oblicz prawdopodobieństwo, że:

(a) drużyna A będzie prowadzić 1:0 do przerwy?

(b) drużyna A wygra mecz 2:0, jeżeli do przerwy był remis?

(c) drużyna A nie przegra meczu?

12. Maszyna butelkująca rozlewa piwo do pustych butelek, o maksymalnej pojemności 505ml. Ilość przelanej cieczy dana jest rozkładem normalnym o średniej 503ml i odchyleniu standardowym 1ml. Jakie jest prawdopodobieństwo, że napoju nie będzie mniej niż 500ml i że zmieści się do butelki?

13. (*) Zmienne $X_1 \dots X_n$ są niezależne i pochodzącą z rozkładu normalnego $N(m, \sigma^2)$. Jaki rozkład ma zmienna losowa $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$? Porównaj dokładamy wynik z oszacowaniem uzyskanym za pomocą Centralnego Twierdzenia Granicznego. Dla jakich n możemy uznać, że przybliżenie jest zasadne? Podpowiedź: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(n) = (n-1)!$.

14. Na pewnej loterii szansa na wylosowanie wygrywającego losu wynosi $p = 0.02$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród 100 zakupionych losów znajdują się co najmniej 3 wygrywające losy.

15. Angielski statystyk J. E. Kerrich podczas internowania w trakcie drugiej wojny światowej otrzymał 5067 orłów na 10000 rzutów monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że w serii 10000 niezależnych rzutów symetryczną monetą otrzymamy 5067 lub więcej orłów.

16. Pewna fabryka układów scalonych produkuje 1000 procesorów na jednym wafelu krzemowym. Wśród nich typowo znajdują się średnio 100 sztuk z wadami fabrycznymi. W jednej z partii naliczono 150 wadliwych jednostek. Czy możemy tę partię usprawiedliwić statystycznie?

17. Niech X będzie zmienną losową w rozkładzie normalnego $N(0, 1)$. Wykorzystując nierówność Czebyszewa oblicz przedział ufności dla poziomu $\alpha = 0.05$ i porównaj go z wartością z tablicy rozkładu normalnego.

18. Wskaż rozkład dyskretny zmiennej losowej X, dla którego zachodzi równość:

    (a) $P(X \geq a) = \frac{E(X)}{a}$, gdzie a oznacza dowolną liczbę całkowitą dodatnią, zaś X jest nieujemne.

    (b) $P(|X - \mu| \geq k\sigma) = \frac{1}{k^2}$, gdzie μ oznacza średnią, zaś σ to odchylenie standardowe tego rozkładu.

19. Alicja posiada rower zabezpieczony łańcuchem z 4-cyfrowym kodem. Każdej pozycji szyfru odpowiada cyfra od 0 do 9. Alicja zostawiając rower w miejscu publicznym zabezpiecza go zmieniając wartość szyfru w sposób losowy. Czyni to według następujących reguł. Po pierwsze, zmienia szyfr, który na początku ma prawidłowo wpisany kod. Po drugie, każdą pozycję szyfru zmienia w sposób niezależny od pozostałych. Po trzecie, zmianę każdej pozycji czterocyfrowego szyfru X_i, określa ten sam rozkład podany w tabelce:

Δx_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$0,01$	$0,5$	$0,3$	$0,08$	$0,08$	$0,03$

Przykładowo, jeśli druga cyfra kodu wynosi 3, to z prawdopodobieństwem 0,3 Alicja zmieni ją na 1 lub 5. Przyjmij że $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$ jest zmienną losową mierzącą jak znaczącej zmiany szyfru dokonała Alicja oraz:

(a) oszacuj $P(|X - E[X]| \geq 12)$ przy użyciu nierówności Czebyszewa.

(b) oblicz ile dokładnie wynosi $P(|X - E[X]| \geq 12)$ i porównaj z oszacowaniem z poprzedniego podpunktu.

20. Czas działania systemu operacyjnego bez konieczności restartu dany jest rozkładem wykładniczym o parametrze $\lambda > 0$. Pewien komputer wyposażony w ten system operacyjny trzeba było zrestartować po dwóch godzinach pracy, następnie po kolejnych czterech i kolejnych trzech. Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa dla tych zdarzeń w zależności od parametru λ i oszacuj najbardziej wiarygodną wartość λ.

21. Liczba wyładowań atmosferycznych, dana jest rozkładem Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Przeprowadzono eksperyment polegający na zliczaniu wyładowań podczas N burz. Otrzymano wynik w postaci $x_1, \ldots, x_N$. Wyznacz estymator największej wiarygodności dla parametru λ.

22. Gęstość prawdopodobieństwa $f_\theta(x)$ dana jest następująco:

$$f_\theta(x) = \theta \mathbb{1}_{(-1,0)}(x) + (1-\theta)\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad \theta \in (0,1)$$

Wyznacz estymator parametru θ używając metody największej wiarygodności.

23. W przedziale $(0, a)$, $a > 0$ wylosowano N punktów. Wyznacz estymator największej wiarygodności dla a.

24. W rozkładzie Beta$(\theta + 1, 1)$, $\theta > -1$, zmienna losowa ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_\theta(x) = (\theta + 1)x^\theta \mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

Korzystając z metody największej wiarygodności wyznacz estymator parametru θ.

25. (*) W losowaniu lotto stwierdzono następujące wygrane:

trafienie	liczba trafień
6 / 6	2
5 / 6	114
4 / 6	6566
3 / 6	103869

Korzystając z metody największej wiarygodności oszacuj liczbę grających.

26. Metodą momentów wyznaczyć estymatory:

(a) parametru $p \in [0,1]$ w rozkładzie geometrycznym

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}_+$$

(b) parametru $\lambda > 0$ w rozkładzie wykładniczym

$$f(X = x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

(c) parametru $\lambda^2 > 0$ w rozkładzie Poissona

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

27. Pokaż, że korzystając z metody momentów dla zmiennych losowych X_i pochodzących z rozkładu jednostajnego $U(-\theta, \theta)$ można otrzymać estymator

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

28. Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i pochodzą z tego samego rozkładu jednostajnego dyskretnego $U(0, \theta)$, gdzie $\theta \in \mathbb{N}$ jest nieznanym parametrem. Największą spośród X_i oznaczmy jako $X_{\max}$. Wiedząc, że $\frac{X_{\max}}{\theta}$ nie zależy od θ pokaż, że

$$\left[\frac{X_{\max}}{(1-\alpha/2)^{1/n}}, \frac{X_{\max}}{(\alpha/2)^{1/n}} \right]$$

jest przedziałem ufności na poziomie $(1-\alpha)$ dla θ.

29. Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i pochodzą z tego samego rozkładu wykładniczego o nieznanym parametrze $\theta > 0$, o gęstości

$$f_\theta(X_i = x) = \theta e^{-\theta x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Oznaczając najmniejszą wartość spośród X_i jako $X_{\min}$ pokaż, że

$$\left[\frac{-\ln(1-\alpha/2)}{nX_{\min}}, \frac{-\ln(\alpha/2)}{nX_{\min}} \right]$$

jest przedziałem ufności na poziomie $(1-\alpha)$ dla parametru θ.

30. Zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i pochodzą z tego samego rozkładu wykładniczego o nieznanym parametrze $\theta > 0$. Jego związek z wartością średnią jest następujący: $EX_i = \theta^{-1}$.

Rozważamy test z hipotezą zerową $H_0 : \mu \leq \mu_0$ przeciwko $H_1 : \mu > \mu_0$. Przedziałem odrzucenia dla tego testu na poziomie istotności α jest

$$\left\{ \overline{X} \geq \frac{\mu_0 c_{1-\alpha}}{2n} \right\},$$

gdzie $c_{1-\alpha}$ będzie kwantylem rzędu $(1-\alpha)$ z rozkładu χ^2 o $2n$ stopniach swobody.

Przeprowadź test dla $\mu_0 = 25$, oblicz p-wartość oraz zinterpretuj wynik dla następującej próby:

$$3, 150, 40, 34, 32, 37, 34, 2, 31, 6, 5, 14, 150, 27, 4, 6, 27, 10, 30, 37.$$